

Hundert Jahre Noether-Theoreme

„Invariantentheorie ist jetzt hier Trumpf“

Cordula Tollmien

Der Aufsatz ist erschienen in: **Physik in unserer Zeit 49 (2018) 4, S. 176-182** (die entsprechenden Seitenzahlen, auch für die hier anders platzierten Kästen, sind eingefügt).

1918 veröffentlichte die Mathematikerin Emmy Noether zwei Theoreme. Diese stellten die beiden fundamentalen Konzepte der Physik Symmetrie und Erhaltung in einen überraschenden Zusammenhang und beeinflussten die theoretische Physik maßgeblich.

„Die reine Mathematik ist eine Art Dichtung in logischen Begriffen. Man sucht nach möglichst allgemeinen Begriffen und Operationen, die einen möglichst weiten Kreis formaler Beziehungen in einfacher und logisch einheitlicher Weise umspannen. Bei solchem Streben nach logischer Schönheit werden die geistigen Instrumente erfunden, deren wir für das tiefere Eindringen in die Gesetzmäßigkeit der Natur bedürfen“ [1].

Dies schrieb niemand Geringeres als Albert Einstein in seinem Nachruf auf die Mathematikerin Emmy Noether (Abbildung 1), die am 14. April 1935 im Alter von erst 53 Jahren im amerikanischen Exil gestorben war. Er charakterisierte damit das mathematische Credo Noethers, die als „Mutter der modernen Algebra“ und radikale Protagonistin einer „begrifflichen Mathematik“ in die Mathematikgeschichte eingegangen ist [2]. Im letzten Halbsatz versteckte Einstein (Abbildung 2) zudem eine Anspielung auf die Arbeiten Emmy Noethers, die sich direkt auf sein eigenes Arbeitsgebiet, die Relativitätstheorie, bezogen und die unser Verständnis von der „Gesetzmäßigkeit der Natur“ nachhaltig verändern und vertiefen sollten. Gemeint sind Noethers Veröffentlichungen über „Invarianten beliebiger Differentialausdrücke“ vom Januar 1918 [3] und ihre große Arbeit über „Invariante Variationsprobleme“ [4] (Abbildung 3), die ihr Mentor und Förderer Felix Klein (Abbildung 4) ziemlich genau vor hundert Jahren, am 26. Juli 1918, der Akademie der Wissenschaften in Göttingen präsentierte.

Einstein war beeindruckt

Schon nach Erhalt der ersten kleinen, von Emmy Noether 1917 fertiggestellten Publikation [3] hatte



Abb.1: Emmy Noether (1882-1935) um 1915.

Einstein am 24. Mai 1918 voller Hochachtung an den Göttinger Mathematiker David Hilbert (Abbildung 5) geschrieben: „Gestern erhielt ich von Fr. Nöther [sic!] eine sehr interessante Arbeit über Invariantenbildung. Es imponiert mir, dass man diese Dinge von so allgemeinem Standpunkt übersehen kann.“ Als dann ihre heute berühmte Arbeit über „Invariante Variationsprobleme“ [4] auf seinem Berliner Schreibtisch landete, schrieb Einstein am 27. Dezember 1918 wieder nach Göttingen, diesmal an den Mathematiker Felix Klein: „Beim Empfang der neuen Arbeit von Frl. Noether empfinde ich es wieder als grosse Ungerechtigkeit, dass man ihr die *venia legendi* vorenthält. Ich wäre sehr dafür, dass wir beim Ministerium einen energischen Schritt unternähmen“ [5]. Denn trotz aller Bemühungen, und darauf bezog sich Einstein, war es Klein und Hilbert nicht gelungen, Emmy Noethers Habilitation noch während des Krieges durchzusetzen.

Doch nun folgte Klein Einsteins Anregung umgehend, und so konnte Emmy Noether im Mai 1919 mit eben dieser Arbeit über „Invariante Variationsprobleme“ endlich habilitiert werden.

Diese von großem Respekt für Emmy Noethers Abstraktionsleistung zeugenden beiden Briefe sind umso bemerkenswerter, als Einstein eigentlich für seine Skepsis gegenüber zu viel Mathematik in der Physik bekannt war. So hielt er etwa die von Hermann Minkowski schon 1908 eingeführte vierdimensionale Raumzeit, die auch heute noch die Grundlage für die mathematische Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie bildet, zunächst für „überflüssige Gelehrsamkeit“ und erkannte erst Jahre später deren Bedeutung [6]. Doch nach der Lektüre von Noethers Artikeln begriff Einstein sofort, dass ihr trotz ihres rein mathematischen Vorgehens etwas gelungen war, was nur ganz selten gelingt: nämlich eine Verbindung zwischen der wahrnehmbaren Welt und ihrer wissenschaftlichen Beschreibung herzustellen, die unmittelbar einsichtig und von großer Schönheit ist [7]. Ihre Bedeutung verglichen amerikanische Physiker später sogar mit dem Satz des Pythagoras [8].

Symmetrie und Erhaltung

Emmy Noether hat in ihrer Arbeit [4] die Anwendung ihrer Theoreme auf die Physik durch entsprechende Beispiele bereits ansatzweise selbst vorgenommen. Physikalisch formuliert klingen denn auch die in Noethers rein mathematischer Fassung (Abbildung 6) nur schwer verständlichen Theoreme vergleichsweise einfach: Das erste ihrer Theoreme besagt, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines (S. 177) physikalischen Systems eine Erhaltungsgröße existiert und umgekehrt. Aus der Homogenität des Raums (Translations-symmetrie) folgt danach die Impulserhaltung, aus der Isotropie des Raums (der Rotationssymmetrie) die Erhaltung des Drehimpulses und aus der Homogenität der Zeit (der Translationsinvarianz) der Energieerhaltungssatz. Heute gehört der Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltung zum Allgemeinwissen in der Physik, damals war diese Einsicht völlig überraschend und ganz und gar neu.

Für das zweite Theorem braucht man ein wenig mehr Mathematik. Insbesondere muss man wissen, dass eine mathematische Gruppe nicht nur aus Zahlen, sondern auch aus räumlichen oder zeitlichen Transformationen bestehen kann: Das erste Noethersche Theorem bezieht sich nun auf eine endlichdimensionale Sym-

metriegruppe, in der zwei hintereinander ausgeführte Transformationen wieder eine Transformation, also ein Element der Gruppe, ergeben. Diese Gruppen sind zudem kontinuierlich, was bedeutet, dass eine beliebig kleine Veränderung der Parameter wieder ein Element der Gruppe ergibt, man also innerhalb der Gruppe Differentialrechnung betreiben kann. Dem zweiten Theorem liegt dagegen eine unendlichdimensionale Symmetriegruppe zugrunde, was bedeutet, dass deren Parameter selbst Funktionen sein können. Eine solche unendlich-dimensionale Gruppe bilden beispielsweise die Eichtransformationen in der Quantentheorie.

Man unterscheidet die globale und die lokale Eichsymmetrie. Eine globale Eichsymmetrie liegt dann vor, wenn sich die Physik nicht ändert, sobald man eine physikalische Größe an allen Orten um denselben konstanten Wert verändert. Beispiele sind die Wahl eines beliebigen Referenz-potentials bei der Messung elektrischer Spannungen oder das Festlegen eines konstanten Phasenfaktors an der komplexen Wellenfunktion der Quantenmechanik. Bei einer lokalen Eichsymmetrie besteht dagegen die Möglichkeit, eine Größe an jedem Ort unabhängig festzulegen, sie also wie einen Maßstab zu eichen – daher die Bezeichnung Eichsymmetrie. Im Unterschied zur globalen Eichsymmetrie werden bei einer lokalen Eichtransformation die Veränderungen nicht durch einen einzigen Wert bestimmt, sondern mit Hilfe einer örtlich und/oder zeitlich variierenden Funktion.

Noethers erstem Theorem liegt demnach eine globale Eichsymmetrie zugrunde, ihrem zweiten eine lokale. Eine Theorie wird Eichtheorie genannt, wenn sie nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung aus einer eichinvarianten Wirkung – also einer Wirkung, die invariant unter lokalen Eichtransformationen ist – die physikalischen Bewegungsgleichungen gewinnt (siehe den Kasten zum „Prinzip der kleinsten Wirkung“ auf der nächsten Seite). Alle fundamentalen Wechselwirkungen – Gravitation, Elektromagnetismus, schwache und starke Wechselwirkung – werden durch solche Eichtheorien beschrieben.

Nach dem zweiten Noetherschen Theorem weist nun auch die einer Eichtransformation zugrundeliegende Symmetrie auf die Existenz einer Erhaltungsgröße hin. So folgt aus dem zweiten Theorem zum Beispiel die Erhaltung der elektrischen Ladung aus der Eichinvarianz des Wirkungs-integrals der Elektrodynamik auch für den vom ersten Theorem nicht abgedeckten Fall, dass die Gültigkeit der Bewegungsgleichungen

PRINZIP DER KLEINSTEN WIRKUNG (S. 178)

Das Prinzip der kleinsten Wirkung erhielt 1834 im Hamiltonschen Prinzip seine heute gültige Form. Eigentlich müsste es genauer Extremalprinzip heißen, weil die als Wirkung bezeichnete physikalische Größe sowohl minimale als auch maximale Werte annehmen kann. Es erlaubt die Bestimmung des dynamischen Verhaltens physikalischer Systeme mit Hilfe der Variationsrechnung, die auf einem von Joseph-Louis Lagrange schon 1788 für die klassische Mechanik eingeführtem Formalismus basiert. Im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik – die a priori nur in Inertialsystemen gilt – behält dieser Formalismus auch in beschleunigten Bezugssystemen seine Gültigkeit.

Für Emmy Noethers Arbeit über „Invariante Variationsprobleme“ spielte dieses Verfahren, wie schon der Titel, aber auch die Formulierung ihrer beiden Theoreme (Abbildung 6) zeigen, eine prominente Rolle. Darüberhinausgehend kombinierte sie aber – und das war das eigentlich Neue – die Variationsrechnung mit invariantentheoretischen und gruppentheoretischen Methoden.

nicht vorausgesetzt wird. Dieser Unterschied ist insbesondere in der Allgemeinen Relativitätstheorie wichtig.

So nannte denn auch Emmy Noether selbst in ihrer Arbeit als ein Beispiel für ihr zweites Theorem die „allgemeine Relativitätstheorie“ [4]. Heute gehört es zum Allgemeinwissen in der Physik, dass die klassischen Energieerhaltungssätze in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr gelten, da es dort keine lokalisierbare Energie gibt. Damit hatte Noether auch die von David Hilbert aufgestellte Behauptung, dass „das Versagen eigentlicher Energiesätze ein charakteristisches Merkmal der ‚allgemeinen Relativität‘“ sei, bewiesen. Dabei bezeichnete sie die „Energiesätze der klassischen Mechanik und ebenso die der alten ‚Relativitätstheorie‘“ – gemeint ist die Spezielle Relativitätstheorie – als „eigentliche“, „da hier keine unendlichen Gruppen auftreten“. „Uneigentliche“ Energiesätze gehen hingegen auf die unendliche Dimension der Transformationsgruppe zurück. „Damit die [Hilbertsche] Behauptung wörtlich gilt,“ schloss Emmy Noether ihre Arbeit und damit Hilbert faktisch unauffällig korrigierend, „ist also die Bezeichnung ‚allgemeine Relativität‘ weiter als gewöhnlich zu fassen, auch auf die vorangehenden von n willkürlichen Funktionen abhängenden Gruppen auszudehnen“ [4, 9].

(S. 178) In einer Anmerkung zu diesem Satz heißt es bei Noether weiter: „Hiermit ist wieder die Richtigkeit einer Bemerkung von Felix Klein bestätigt, daß die in

der Physik übliche Bezeichnung ‚Relativität‘ zu ersetzen sei durch ‚Invarianz relativ zu einer Gruppe‘.“ Diesen Gedanken hatte Klein schon 1910 in einem Vortrag formuliert [10]. Er führte damit sein Erlanger Programm weiter, in dem er 1872 als erst 23-jähriger junger Dozent kühn behauptet hatte, dass jede Geo-

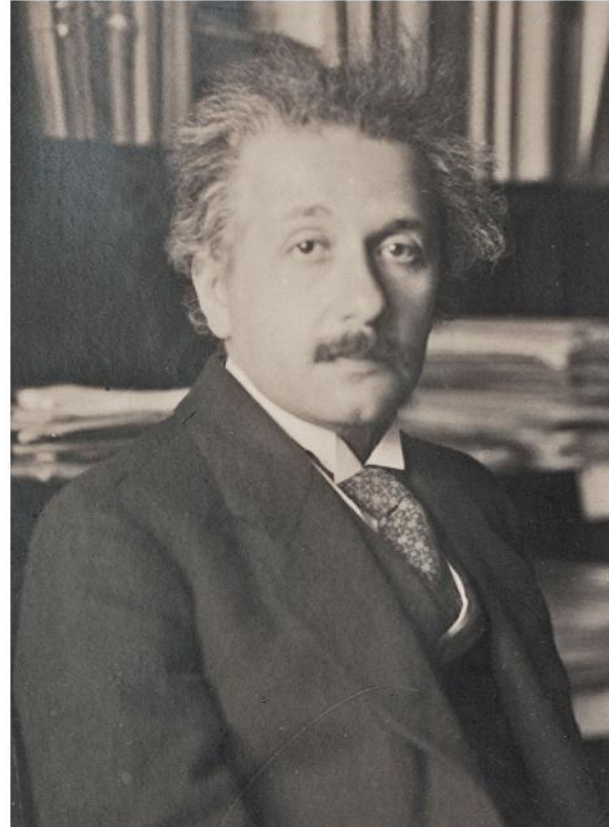


Abb. 2 Albert Einstein (1879–1955) um 1920.

metrie durch die ihr zugehörige Transformationsgruppe definiert werden könne und Geometrie daher nichts anderes sei als das Studium der Invarianten einer Transformationsgruppe. Ihre Arbeit über „Invariante Variationsprobleme“, die in enger Zusammenarbeit mit Klein entstanden war, hat Emmy Noether denn auch Klein zu dessen 50-jährigem Doktorjubiläum gewidmet (Abbildung 3).

Inmitten des „relativistischen Getümmels“

Emmy Noether, die am 23. März 1882 als Tochter des Mathematikprofessors Max Noether in Erlangen geboren worden war, musste sich ihren Platz in der akademischen Welt hart erkämpfen. Schon, dass sie als Frau studieren durfte, war damals nicht selbstverständlich. Auch nachdem sie im Dezember 1907 an der Universität Erlangen bei Paul Gordan mit einer Arbeit aus dem Gebiet der Invariantentheorie „summa cum laude“ promoviert worden war, stand ihr keineswegs eine universitäre Laufbahn offen. Von 1908 bis 1915 arbeitete Emmy Noether daher ohne Anstellung

und Vertrag mit ihrem Vater und vor allem mit dem seit 1911 in Erlangen lehrenden Mathematiker Ernst Fischer zusammen, der sie mit der Hilbertschen Denkweise vertraut machte. In Göttingen waren Klein und Hilbert damals gerade intensiv mit der Einsteinschen Relativitätstheorie beschäftigt. Und weil sie hofften, in diesem Zusammenhang von Emmy Noethers Kenntnissen in der Invariantentheorie profitieren zu können, luden sie diese zum Sommersemester 1915 nach Göttingen ein. Dabei stellten sie ihr in Aussicht, dass sie sich an der Göttinger Universität habilitieren könne.

Kurz nach Noethers Wechsel nach Göttingen hielt Anfang Juli 1915 Einstein dort sechs zweistündige Vorlesungen „Über Gravitation“. Dies hatte nicht nur zur Folge, dass sich Hilbert mit gesteigertem Elan in die Gravitationstheorie vertiefte und sich einen regelrechten Wettstreit mit Einstein bei der Aufstellung der Gravitationsgleichungen lieferte, sondern auch, dass Emmy Noether in diesen Konkurrenzkampf intensiv eingespannt wurde. So kam es, dass auch sie eine zentrale Rolle in der von David Rowe so genannten „Göttinger Antwort“ auf die Allgemeine Relativitätstheorie spielte [11].

Emmy Noether unterstützte Hilbert dabei nicht nur im Hintergrund bei der Aufstellung seiner Gleichungen, sondern assistierte ihm beispielsweise auch bei einem Vortrag am 16. November 1915 vor der Göttinger Mathematischen Gesellschaft. Hilbert hatte diesen, nachdem er eine Mitteilung Einsteins über dessen Fortschritte erhalten hatte, offensichtlich gezielt angesetzt, um Einstein zuvorzukommen. „Invariantentheorie ist jetzt hier Trumpf“, schrieb Emmy Noether dazu an Ernst Fischer. „Hilbert will nächste Woche über seine Einsteinschen Differentialinvarianten vortragen, und da müssen die Göttinger doch etwas können“ [12].

Es verwundert daher nicht, dass Einstein zumindest kurzzeitig verärgert war, als es Hilbert wenig später tatsächlich gelang, ihm mit der Veröffentlichung seiner Ergebnisse um ein paar Tage zuvorzukommen. Diese Verstimmung (S. 179) hielt jedoch nicht lange an. Hilbert erkannte wie alle anderen Einstein als den alleinigen Schöpfer der Relativitätstheorie an – auch wenn er vielleicht ein wenig enttäuscht war, dass die Feldgleichungen nicht als Einstein-Hilbert-Gleichungen in die Geschichte eingingen. Beide Forscher setzten ihre Zusammenarbeit, in die auch Emmy Noether eingebunden blieb, fast ohne Unterbrechung fort.

Der November 1915 war für Emmy Noether nicht nur wegen des Einstein-Hilbertschen Wettstreits eine auf-

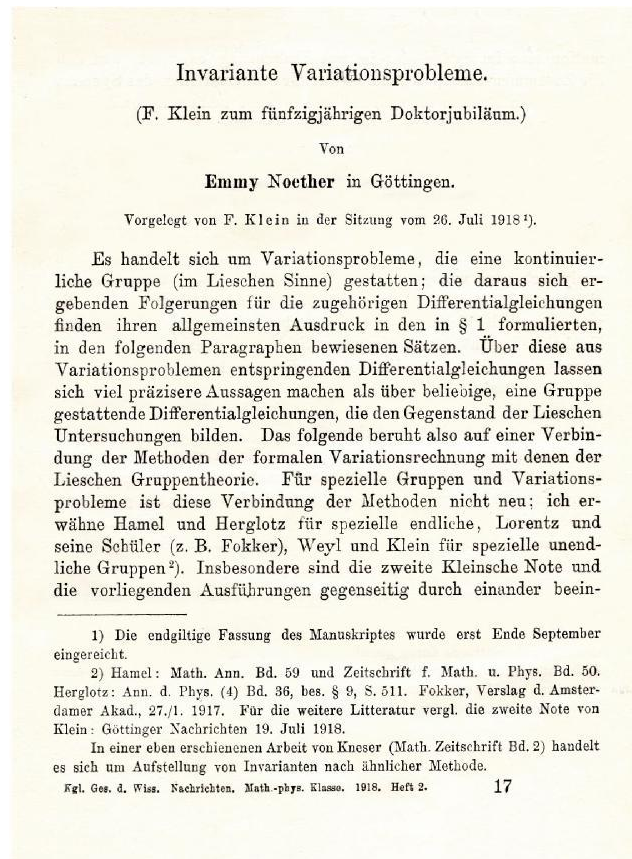


Abb. 3 Emmy Noether, Invariante Variationsprobleme, 1918 [4].

regende Zeit, sondern auch weil ihr Ende Juli 1915 gestellter Antrag auf Habilitation im November 1915 in die Entscheidungsphase ging. Nach erregten Debatten innerhalb der Göttinger Fakultät (siehe den Kasten „Keine Badeanstalt!“ auf der nächsten Seite) wurde schließlich immerhin ein Antrag auf eine Ausnahmegenehmigung für Noethers Habilitation an das Ministerium weitergeleitet, der von diesem jedoch zunächst einmal einfach nicht beantwortet wurde. Durch persönliche Vorsprache erreichte Hilbert lediglich, dass Emmy Noether mit Billigung des Ministeriums Seminare unter seinem Namen abhalten konnte: „Invariantentheorie. Prof. Hilbert mit Unterstützung von Frl. Dr. E. Noether“, so stand es erstmals im Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1916/17. Ein zweiter Versuch, den Hilbert 1917 unternahm, um Emmy Noethers Habilitation doch noch durchzusetzen, hatte dann die von ihm natürlich nicht beabsichtigte Folge, dass das Ministerium mit Schreiben vom 5. November 1917 nun die endgültige Ablehnung des Gesuchs verfügte. Begründet wurde dies damit, dass die Zulassung von Frauen zur Habilitation nur grundsätzlich entschieden werden könne und Ausnahmen daher nicht genehmigt werden könnten [2].

Schon seit Anfang 1917 war Emmy Noether wiederum in die enge Zusammenarbeit mit einem Kollegen



Abb.4 Felix Klein (1849-1925) um 1912.

eingebunden, diesmal mit Felix Klein. Angeregt durch das „relativistische Getümmel“ [11] des Jahres 1915 hatte er seine Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert abgebrochen und las seit dem Sommersemester 1916 über Relativitätstheorie. Klein führte in diesem Zusammenhang einen Briefwechsel mit Einstein, der im März 1918 in einen intensiven Austausch über die Bedeutung der Energieerhaltungssätze mündete, an dem auch Emmy Noether beteiligt war. Sie erkannte, was Klein zunächst nicht hatte wahrhaben wollen, dass nämlich nicht alle mathematisch formulierbaren Erhaltungssätze auch physikalisch sinnvoll sind. So kam sie zu ihrer Unterscheidung zwischen „eigentlichen“ Erhaltungssätzen und solchen, die man lediglich als mathematische Identitäten bezeichnen könnte [10, 11].

Stimulierend bis heute

Man sollte meinen, dass die intellektuelle Meisterleistung, die Emmy Noether mit ihrer Habilitationsarbeit erbracht hatte, für sie den wissenschaftlichen Durchbruch bedeutet hätte. Dem war aber nicht so. Dafür sind im Wesentlichen drei Gründe verantwortlich:

Zum einen hat sich Emmy Noether in ihrem weiteren Leben niemals mehr mit diesen Fragestellungen beschäftigt, sondern wandte sich der (S. 180) abstrakten Algebra zu. Den Anfang hierfür markiert ihre schon



Abb. 5 David Hilbert (1862–1943) um 1912.

KEINE BADEANSTALT ! (S. 179)

Die Diskussionen, die Hilbert wegen der Habilitation von Emmy Noether in der Fakultät zu überstehen hatte, veranlassten ihn bekanntlich zu dem viel zitierten Ausspruch: „Aber meine Herren, eine Universität ist doch keine Badeanstalt!“ Damit spielte er darauf an, dass in den deutschen Badeanstalten das Schwimmen damals in der Regel nach Geschlechtern getrennt erfolgte.

Weniger bekannt ist dagegen, dass sich auch Einstein auf diese fakultätsinternen Auseinandersetzungen bezog, als er in seinem schon im Artikel zitierten Brief an Hilbert vom 24. Mai 1918 schrieb: „Es hätte den Göttinger Feldgrauen [gemeint sind damit die im Feld stehenden Göttinger Wissenschaftler] nichts geschadet, wenn sie zu Fr. Nöther [sic!] in die Schule geschickt worden wären. Sie scheint ihr Handwerk gut zu verstehen“ [5]. Die prinzipiellen Gegner einer Habilitation von Frauen hatten nämlich unter anderem damit argumentiert, dass Frauen, wenn sie sich habilitieren dürften, den sich für das Vaterland aufopfernden Soldaten nach deren Rückkehr aus dem Krieg die akademischen Stellen wegnehmen würden.

1921 veröffentlichte, ebenfalls bahnbrechende Arbeit über „Idealtheorie in Ringbereichen“.

Zum zweiten aber waren dafür ihre Kollegen und Mitstreiter verantwortlich, die sich wie Hilbert, Klein und Einstein zwar während der Zusammenarbeit auf sie bezogen (siehe den Kasten „Wieder Fr. Noether zu danken“ auf der nächsten Seite) und ihre Verdienste

zumindest in Nebenbemerkungen auch öffentlich machten. In ihren späteren Publikationen aber unterschlugen sie Emmy Noether entweder ganz oder beschränkten sich darauf, ihre Arbeit im Literaturverzeichnis zu erwähnen. Es begann schon damit, dass Hilbert Noether in seinen Veröffentlichungen über „Die Grundlagen der Physik“ 1915 und 1916/17, in denen er seine Feldgleichungen präsentierte, gar nicht erwähnte und dass sich Klein zwar bei ihr bedankte [14], sie aber nach heutigem Verständnis eigentlich als Koautorin hätte nennen müssen.

Auch Wolfgang Pauli unterließ in seinem einflussreichen Artikel über Relativitätstheorie in der Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften von 1921 einen Hinweis auf Noethers Arbeit. Und Hermann Weyl sah in seinem erstmals 1918 veröffentlichten Buch „Raum, Zeit, Materie – Vorlesungen zur allgemeinen Relativitätstheorie“ auch in späteren überarbeiteten Auflagen keine Notwendigkeit, explizit auf Noethers Ergebnisse einzugehen.

Außerdem wurden – und das ist der dritte Grund für das lange Schweigen über Noethers grundlegenden Beitrag zur theoretischen Physik – Symmetrien in der Physik erst in den 1950er Jahren populär, und auch damals gab es nur wenige Physiker, die Noethers Originalartikel lasen und verstanden. Zu der verspäteten Wahrnehmung ihrer bahnbrechenden Arbeit trug sicher auch bei, dass es bis 1971 keine englische Übersetzung dieser Arbeit gab und die schließlich von Morton A. Tavel erstellte erste Übersetzung an einem relativ abseitigen Ort erschien [15].

Noch 1968 schrieb der amerikanische Physiker Eugene Wigner an Noethers Biographen Clark Kimberling, dass die Hochachtung, welche die Physiker Emmy Noether zollten, nur ein Lippenbekenntnis sei und die meisten ihre Arbeit nicht wirklich gelesen hätten. Obwohl sein Hauptarbeitsgebiet der Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungssätzen war und Wigner 1929 sogar in Göttingen studiert hatte, hat es den Anschein, dass er dabei insbesondere auch von sich selbst sprach [16].

Doch mit der Weiterentwicklung der theoretischen Physik und nachdem es in der Physik inzwischen selbstverständlich ist, auf der Suche nach neuen Erhaltungsgesetzen gezielt nach Invarianzen Ausschau zu halten, konnte Noethers Arbeit nicht länger ignoriert werden. Heute erscheint kein physikalisches Fachbuch mehr, in dem nicht zumindest auf Emmy Noethers erstes Theorem eingegangen wird. Inzwischen sind kaum

noch zu zählende Artikel, Vorträge und Filme im Internet zu finden, die sich mehr oder weniger gekonnt mit der von Noether entdeckten Verbindung zwischen der wahrnehmbaren Welt und ihrer wissenschaftlichen Beschreibung befassen.

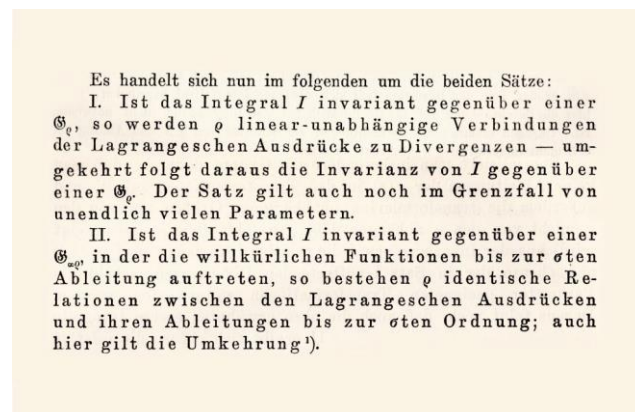


Abb. 6 Die Originalformulierung der beiden Noetherschen Theoreme 1918 [4].

„WIEDER FRIL. NOETHER ZU DANKEN“ (S. 181)

Beispiele für Briefe oder Veröffentlichungen, in denen Hilbert und Klein die für beide sehr wertvolle Mitarbeit Emmy Noethers erwähnten:

Hilbert an Einstein am 27.5.1916: „Mein Energiesatz wird wohl mit dem Ihrigen zusammenhängen; ich habe Fril. Nöther [sic!] diese Frage schon übergeben [...] Ich lege der Kürze [wegen] den beiliegenden Zettel von Fril. Nöther bei [5]“.

Aus der als Briefwechsel gestalteten, im Januar 1918 veröffentlichten Kritik Kleins an Hilberts Gravitationsgleichungen:

Klein an Hilbert:

„Hier habe ich eine wesentliche Einschaltung zu machen. Sie wissen, dass mich Fril. Nöther [sic] bei meinen Arbeiten fortgesetzt berät und dass ich eigentlich nur durch sie in die vorliegende Materie eingedrungen bin.“

Und Hilberts Antwort an Klein:

„Mit Ihren Ausführungen über den Energiesatz stimme ich sachlich völlig überein: Emmy Nöther, deren Hilfe ich zur Klärung derartiger analytischer meinen Energiesatz betreffenden Fragen vor mehr als Jahresfrist anrief, fand damals ...“ [13].

Felix Klein im Juli 1918:

„Ich darf auch nicht unterlassen, für fördernde Teilnahme an meinen neuen Arbeiten wieder Fril. Noether zu danken, welche die mathematischen Gedanken, die ich in Anpassung an die physikalische Fragestellung für das Intergral II [vergl. Abbildung 6] benutze, ihrerseits allgemein herausgearbeitet hat und in einer demnächst in diesen Nachrichten zu veröffentlichenden Note [4] darstellen wird“ [14].

(S. 181) Dies gilt jedoch nicht für ihr zweites Theorem. Es spielt zwar eine zentrale Rolle in der moder-

nen Theorie der Eichtransformationen, und schon die frühen Arbeiten von Hermann Weyl, von dem der Begriff der Eichsymmetrie stammt, können als eine Anwendung von Noethers zweitem Theorem gelten [17]. Trotzdem wird bis heute in vielen Publikationen und insbesondere im Internet von den Noether-Theoremen häufig nur im Singular gesprochen und damit nur auf das erste Theorem rekurriert.

Die französische Mathematikerin Yvette Kosmann-Schwarzbach hat in einer sehr lesenswerten Arbeit die je-weils unterschiedlichen Rezeption der beiden Noether-Theoreme zu unterschiedlichen Zeiten genauestens analysiert [16]. Der Mathematikhistoriker Reinhard Siegmund-Schultze wertete diese Arbeit als „Spitzenleistung mathematik- und physikhistorischer Forschung“. „Besonders wichtig scheint mir“, so Siegmund-Schultze, „dass Kosmann-Schwarzbach in den letzten Kapiteln ihrer Arbeit ‚echte Verallgemeinerungen‘ [...] der beiden in der Noetherschen Arbeit enthaltenen Theoreme in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts (Eichfeldtheorien, Faserbündel, Variationsrechnung) beleuchtet, die die unverminderte stimulierende Kraft des Noetherschen Beitrages in mathematischer Physik und Mathematik belegen“ [18].

Auf zwei besonders spektakuläre Fälle der Anwendung der Noether-Theoreme soll hier noch kurz hingewiesen werden. Als Anfang der 1930er Jahre entdeckt wurde, dass bei einigen radioaktiven Zerfällen scheinbar Energie und Impuls verloren gingen, forderten in der allgemeinen darauffolgenden Aufregung einige Wissenschaftler sogar schon, den Energie- und den Impulserhaltungssatz preiszugeben. Stattdessen sagte Wolfgang Pauli Noethers Theorie entsprechend die Existenz des Neutrinos voraus, das 1956 dann tatsächlich entdeckt wurde. Und auch die Existenz des Higgs-Bosons, das 2012 unter großer öffentlicher Anteilnahme nachgewiesen wurde, war 1964 auf Grund von Symmetrieüberlegungen gefordert worden.

Zusammenfassung

Im Juli 1918 publizierte Emmy Noether eine Arbeit mit dem Titel „Invariante Variationsprobleme“. Darin formulierte sie zwei für die Physik bahnbrechende Theoreme. Das erste Theorem besagt, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems eine Erhaltungsgröße gehört und umgekehrt. Das zweite Theorem ist weniger bekannt. Es kann in Noethers eigenen Worten als die „größtmögliche gruppen-

theoretische Verallgemeinerung der allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnet werden“. Noethers Leistung wurde von Albert Einstein, David Hilbert und Felix Klein zwar anfänglich durchaus gewürdigt, später geriet ihre Arbeit jedoch vorübergehend in Vergessenheit. Sie wurde erst wiederentdeckt, nachdem seit den 1950er Jahren Symmetriebetrachtungen in der Physik zunehmend wichtiger geworden waren.

Fotonachweis (S.182)

Abdruck der Portraits (Cod. Ms. Hilbert 754 und Sammlung Voit, D. Hilbert 4) mit freundlicher Genehmigung der Handschriftenabteilung der Universitätsbibliothek Göttingen.

Literatur

- [1] R. Siegmund-Schultze, Mitteilungen der DMV **2007**, 15, 221; Einsteins Nachruf 222.
- [2] C. Tollmien, „Sind wir doch der Meinung, daß ein weiblicher Kopf nur ganz ausnahmsweise in der Mathematik schöpferisch tätig sein kann...“ – Biographie von Noether (1882–1935) und zugleich Beitrag zur Geschichte der Habilitation von Frauen an der Universität Göttingen, Göttinger Jahrbuch **1990**, 38, 153; www.tollmien.com/pdf/tollmiennoether1990.pdf
- [3] E. Noether, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse **1918**, 37, vorgelegt am 25.1.1918 durch Felix Klein.
- [4] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, ebenda, 235, vorgelegt am 26.7.1918 durch Felix Klein, endgültige Fassung des Manuskripts September 1918.
- [3] und [4] auch als Faksimiledruck in: Dies., Gesammelte Abhandlungen – Collected Papers, (Hrsg. N. Jacobson), Springer Verlag, Berlin-Heidelberg 1983 (Reprint 2013), 240 und 248.
- [5] A. Einstein, Collected Papers, Bd. 8: The Berlin Years: Correspondence, 1914–1918, Teil A: 1914–1918 und Teil B: 1918 (Hrsg. R. Schulmann et. al.), Princeton University Press 1998, Nr. 222, Nr. 548, Nr. 677.
- [6] A. Fölsing, Albert Einstein. Eine Biographie, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1993, 280.
- [7] E. P. Fischer, Emmy Noether oder Die Bedeutung der Symmetrie, in: Leonardo, Heisenberg & Co. Eine kleine Geschichte der Wissenschaft in Porträts, Piper Verlag, München Zürich 2002, 136.
- [8] L. M. Lederman, C. T. Hill, Symmetry and the Beautiful Universe, Prometheus Books, Amherst 2004, 73. Dieses viel zitierte Buch datiert Noethers Arbeit allerdings falsch auf 1915.
- [9] U. Majer, T. Sauer, Introduction, in: David Hilbert’s Lectures on the Foundation of Physics 1915-1927. Relativity, Quantum Theory and Epistemology, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2009, 1, hier 17.

- [10] R. Tobies, *Naturwissenschaftliche Rundschau*, 1994, 47, 345.
- [11] D. Rowe, *The Göttingen Response to General Relativity and Emmy Noether's Theorems*, in: *The Symbolic Universe. Geometry and Physics 1890–1930* (Ed. J. J. Gray), Oxford University Press, Oxford 1999, 189; „thick of the relativistic fray” 210.
- [12] T. Sauer, *Archive for History of Exact Sciences* 1999, 52, 529; *Noethers Brief* 542.
- [13] F. Klein, *Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik*, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse* 1918, 469; vorgelegt in der Sitzung vom 25.1.1918.
- [14] F. Klein, *Über die Differentialgesetze für Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie*, ebenda, 171, vorgelegt in der Sitzung vom 19. Juli 1918.
- [15] M. A. Tavel, *J. Transport Theory and Statistical Mechanics* 1971, 1, 183; ohne die Einführung Tavel's online unter: <https://arxiv.org/pdf/physics/0503066.pdf>
- [16] Y. Kosmann-Schwarzbach, *The Noether Theorems. Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London 2011; *Wigner* 82.
- [17] K. A. Brading, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 2002, 33, 3.
- [18] R. Siegmund-Schultze, *Mitteilungen der DMV* 2011, 19, 100.